

Barem clasa a IX-a (OLM 2017-etapa locală)

Subiectul I. (7 puncte)

Dacă $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PA} = k$ atunci $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}}{k+1}$, $\overrightarrow{ON} = \frac{\overrightarrow{OB} + k\overrightarrow{OC}}{k+1}$, $\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OC} + k\overrightarrow{OA}}{k+1}$

de unde $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$ (2 puncte)

Deoarece G este centrul de greutate al $\triangle MNP$ avem că $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$ (1 punct)

Se demonstrează că dacă “M este punctul de intersecție ale segmentelor ce unesc mijloacele laturilor opuse ale patrulaterului ABCD are loc relația

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})”$$
 (2 puncte)

Scriind relația anterioară pentru fiecare din cele trei patrulatere, avem:

$$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{ON})$$

$$\overrightarrow{OF} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP})$$
 (1 punct)

$$\overrightarrow{OR} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OM}),$$

de unde prin adunare avem $4(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OR}) = 2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}) = 4(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP})$,

deci $\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} = 3\overrightarrow{OG}$ (1 punct)

Subiectul II. (7 puncte)

$$\text{Avem } a_n = \frac{\sqrt{2 \cdot 3} + \sqrt{1 \cdot 4}}{2} + \frac{\sqrt{4 \cdot 5} + \sqrt{3 \cdot 6}}{2} + \dots + \frac{\sqrt{2n(2n+1)} + \sqrt{(2n-1)(2n+2)}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\sqrt{2k(2k+1)} + \sqrt{(2k-1)(2k+2)}).$$
 (1 punct)

$$a) \sqrt{2k(2k+1)} + \sqrt{(2k-1)(2k+2)} > \sqrt{2k \cdot 2k} + \sqrt{(2k-1)(2k+1+1)} = 2k + \sqrt{4k^2 - 1 + 2k - 1} = 2k +$$

$$\sqrt{4k^2 + 2(k-1)} \geq 2k + 2k = 4k.$$

$$\text{Deci, } a_n > \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n 4k = n(n+1) \quad (1)$$
 (2 puncte)

Folosind inegalitatea mediilor obținem:

$$\sqrt{2k(2k+1)} + \sqrt{(2k-1)(2k+2)} < \frac{2k+2k+1}{2} + \frac{2k-1+2k+2}{2} = 4k+1,$$

$$a_n < \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (4k+1) = n(n+1) + \frac{n}{2} = n^2 + \frac{3}{2}n < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2. \quad (2) \quad (2 \text{ puncte})$$

Din (1) și (2) se obține inegalitatea cerută.

b) Din a) avem succesiv:

$$n(n+1) < a_n < (n+1)^2; \sqrt{n(n+1)} < \sqrt{a_n} < n+1; \lfloor \sqrt{n(n+1)} \rfloor < \lfloor \sqrt{a_n} \rfloor < n+1; \quad (1 \text{ punct})$$

$$n < \lfloor \sqrt{a_n} \rfloor < n+1, \text{ de unde } \lfloor \sqrt{a_n} \rfloor = n. \quad (1 \text{ punct})$$

Subiectul III. (7 puncte)

$$\sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k}}{1 + \sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k}(1 + \sqrt{k} - \sqrt{k+1})}{1 + 2\sqrt{k} + k - k - 1} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (1 + \sqrt{k} - \sqrt{k+1}) = \frac{1}{2} (n+1 - \sqrt{n+1}). \quad (3 \text{ puncte})$$

$$\frac{1}{2} (n+1 - \sqrt{n+1}) = 1035 \Leftrightarrow n+1 - \sqrt{n+1} = 2070. \quad (1 \text{ punct})$$

$$\text{Notăm } \sqrt{n+1} = t \geq 0, \quad t^2 - t = 2070, \quad t = 46$$

$$\sqrt{n+1} = 46 \Rightarrow n = 2115. \quad (3 \text{ puncte})$$

Subiectul IV. (7 puncte)

Inegalitatea din stânga se poate obține din inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz :

$$\left(\sum_{i=1}^{2016} a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{2016} a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{2016} b_i^2 \right) \text{ în care se alege } a_i = \sqrt{x_i}, b_i = \frac{1}{\sqrt{x_i}}, i = \overline{1, 2016}.$$

Egalitatea are loc numai dacă toate numerele x_i sunt egale respectiv $x_i = 1, i = \overline{1, 2016}$. (3 puncte)

Pentru inegalitatea din partea dreaptă se procedează astfel: $x_i \in [1, 5] \Rightarrow (x_i - 1) \cdot (x_i - 5) \leq 0$ adică

$$x_i^2 - 6 \cdot x_i + 5 \leq 0 \Leftrightarrow x_i + 5 \cdot \frac{1}{x_i} \leq 6, i = \overline{1, 2016}. \text{ Însușind aceste ultime inegalități se obține:}$$

$$\sum_{i=1}^{2016} x_i + 5 \cdot \sum_{i=1}^{2016} \frac{1}{x_i} \leq 6 \cdot 2016. \text{ Dacă se notează cu } a = \sum_{i=1}^{2016} x_i \text{ și cu } b = \sum_{i=1}^{2016} \frac{1}{x_i} \text{ având în}$$

vedere ultima inegalitate se obține : $a + 5 \cdot b \leq 6 \cdot 2016$. Se aplică inegalitatea mediilor și se obține

$$\sqrt{5 \cdot a \cdot b} \leq \frac{a + 5 \cdot b}{2} \leq \frac{6 \cdot 2016}{2} = 3 \cdot 2016 \Rightarrow a \cdot b \leq \frac{3^2 \cdot 2016^2}{5} = \frac{9 \cdot 2016^2}{5} \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{2016} x_i \right) \left(\sum_{i=1}^{2016} \frac{1}{x_i} \right) \leq \frac{9 \cdot 2016^2}{5} \quad (3 \text{ puncte})$$

Pentru egalitate presupunem că n numere sunt egale cu 1 și $2016 - n$ vor fi egale cu 5. Atunci din

$$a = 5 \cdot b \text{ rezultă că } 1008 \text{ numere sunt egale cu 1 și } 1008 \text{ numere sunt egale cu 5.} \quad (1 \text{ punct})$$